

BACCALAURÉAT BLANC

Spécialité Mathématiques (sujet 1)

Lundi 26 février 2024

CORRIGÉ

Exercice 1

1. (a) On veut démontrer que le triangle ABC est rectangle en A. On a

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4 + 7 - 3 = 0.$$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et le triangle ABC est donc rectangle en A.

- (b) On a

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 5 - 6 + 12 = 11.$$

puis

$$BA = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11} \quad \text{et} \quad BC = \sqrt{5^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{77}.$$

- (c) On cherche la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré. On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= BA \times BC \times \cos(\widehat{ABC}) \iff 11 = \sqrt{11} \times \sqrt{77} \times \cos(\widehat{ABC}) \\ &\iff 11 = \sqrt{11} \times \sqrt{11} \times \sqrt{7} \times \cos(\widehat{ABC}) \\ &\iff \cos(\widehat{ABC}) = \frac{1}{\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

La calculatrice donne $\widehat{ABC} \approx 68^\circ$ au degré près.

Remarque. On pouvait aussi utiliser la trigonométrie dans le triangle rectangle ABC.

2. (a) On veut démontrer que le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (ABC). Un vecteur normal du plan $\mathcal{P}$ est le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car

ABC est un triangle rectangle. De plus

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} &= 2 \times (-1) - 1 \times 1 - 1 \times (-3) = -2 - 1 + 3 = 0 \quad \text{et} \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} &= 2 \times 4 - 1 \times 7 - 1 \times 1 = 8 - 7 - 1 = 0.\end{aligned}$$

$\vec{n}$ est donc un vecteur normal à *deux vecteurs non colinéaires* du plan (ABC), c'est donc un vecteur normal à ce plan et au plan $\mathcal{P}$. Les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont donc parallèles.

- (b) On déduit une équation cartésienne du plan (ABC). Le plan (ABC) a donc une équation de la forme $2x - y - z + d = 0$, comme A appartient à ce plan, on a $5 + d = 0$ soit $d = -5$. Une équation de (ABC) est donc

$$2x - y - z - 5 = 0.$$

- (c) On détermine une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E. Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est donc le vecteur $\vec{n}$. On a donc $M(x, y, z) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{EM} = t\vec{n}$, avec $t \in \mathbf{R}$, soit

$$\begin{cases} x - 1 = 2t \\ y - 2 = -t \\ z - 4 = -t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}).$$

- (d) On démontre que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $\left(4, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$. H correspond à l'intersection du plan (ABC) avec la droite perpendiculaire à (ABC) qui passe par E, soit la droite $\mathcal{D}$, les coordonnées de H seront donc solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 4 - t \\ 2x - y - z - 5 = 0 \end{cases}$$

En injectant les trois premières équations dans la quatrième, on obtient

$$2(1 + 2t) - (2 - t) - (4 - t) - 5 = 0 \iff 6t - 9 = 0 \iff t = \frac{3}{2}.$$

On remplace alors la valeur de t ainsi obtenue dans les trois premières équations du système, ce qui conduit à

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Ce sont bien les coordonnées voulues pour le projeté orthogonal.

Exercice 2**Partie A**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = \frac{12u_n - 10}{u_n + 1}.$$

1. (a) Voir en annexe (page 7).

(b) On conjecture que la suite est croissante et tend vers une limite qui correspond aux coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{D}$.

2. (a) La fonction $f : x \mapsto \frac{12x-10}{x+1}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a, pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{12(x+1) - (12x-10) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{22}{(x+1)^2} > 0,$$

ce qui prouve que la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$.

(b) Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10.$$

- Initialisation. Avec $u_0 = 2$, on calcule $u_1 = \frac{12 \times 2 - 10}{2+1} = \frac{14}{3}$.
On a bien $2 \leq u_0 \leq u_1 \leq 10$. La proposition est vraie au rang 0.
- Hérédité. Supposons que $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$ pour un n particulier. Comme la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$,

$$2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10 \implies f(2) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(10).$$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et

$$f(2) = f(u_0) = u_1 = \frac{14}{3} \quad \text{et} \quad f(10) = \frac{12 \times 10 - 10}{10+1} = \frac{110}{11} = 10.$$

Comme $u_n \neq -1$ (par l'hypothèse de récurrence), on déduit que

$$2 \leq \frac{14}{3} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10.$$

Ainsi la proposition est héréditaire.

- Conclusion. Par le principe de récurrence, on peut affirmer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,
 $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

(c) La suite (u_n) est convergente car croissante et majorée (par 10).

3. Soit ℓ la limite de la suite (u_n) . Comme la fonction f est *continue* sur $[0, +\infty[$ (car dérivable), la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. On résout cette équation :

$$\frac{12\ell - 10}{\ell + 1} = \ell \iff \ell(\ell + 1) = 12\ell - 10 \iff \ell^2 - 11\ell + 10 = 0 \iff (\ell - 10)(\ell - 1) = 0.$$

Ainsi $\ell = 1$ ou $\ell = 10$. Mais comme $2 \leq u_n \leq 10$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $2 \leq \ell \leq 10$. On en conclut que $\ell = 10$.

Partie B

1. On complète le tableau de fonctionnement du programme Python (arrondi au centième).

n	0	1	2	3	4
u	2	4,67	8,12	9,59	9,92
$ u - 10 > 0,1$ (Vrai/Faux)	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

2. L'algorithme calcule le rang à partir duquel la suite (u_n) est proche de sa limite 10 à 0,1 près.
3. D'après le tableau précédent, lorsque l'algorithme s'arrête, on obtient $n = 4$

Exercice 3**Partie A**

1. (a) On a les informations suivantes :

$$P(V) = \frac{1}{4}, \quad P_V(M) = \frac{1}{12}, \quad P_M(\bar{V}) = \frac{2}{3}.$$

- (b) V et $\bar{V}$ étant deux événements contraires, on peut écrire :

$$P(\bar{V}) = 1 - P(V) = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad P_M(V) = 1 - P_M(\bar{V}) = \frac{1}{3}.$$

2. (a) On calcule $P(M \cap V)$:

$$P(M \cap V) = P_V(M) \times P(V) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{48}.$$

- (b) On sait que

$$P_M(V) = \frac{1}{3} = \frac{P(M \cap V)}{P(M)},$$

ce qui donne alors :

$$P(M) = \frac{P(M \cap V)}{P_M(V)} = \frac{1}{48} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{16}.$$

3. (a) On utilise ensuite la formule des probabilités totales :

$$P(M) = P(M \cap V) + P(M \cap \bar{V})$$

$$\text{donc } P(M \cap \bar{V}) = P(M) - P(M \cap V) = \frac{1 \times 3}{16 \times 3} - \frac{1}{48} = \frac{2}{48} = \frac{1}{24}.$$

- (b) La probabilité qu'une personne non vaccinée tombe malade est alors :

$$P_{\bar{V}}(M) = \frac{P(M \cap \bar{V})}{P(\bar{V})} = \frac{1}{24} \times \frac{4}{3} = \frac{\cancel{4}}{6 \times \cancel{4} \times 3} = \frac{1}{18}.$$

Partie B

1. (a) L'expérience aléatoire consiste à répéter $n = 10$ fois, de manière indépendante (car il y a remise des boules), une épreuve de Bernoulli où le succès « tirer une boule rouge » a une probabilité $p = 0,3$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, elle suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$, notée $\mathcal{B}(10; 0,3)$.
- (b) On a donc, pour tout $k \in \{0, \dots, 10\}$,

$$P(X = k) = \binom{10}{k} 0,3^k \times 0,7^{10-k}.$$

2. (a) $P(X = 3) \approx 0,267$.

(b) $P(2 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 1) \approx 0,840$.

(c) $P_{X \leq 6}(X \leq 4) = \frac{P((X \leq 4) \cap (X \leq 6))}{P(X \leq 6)} = \frac{P(X \leq 4)}{P(X \leq 6)} \approx 0,859$.

Exercice 4

La fonction f est définie sur $]1, +\infty[$ par

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}.$$

1. Pour tout x dans $]1, +\infty[$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \left(-\frac{\ln'(x)}{\ln^2(x)} \right) = \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{x}}{\ln^2(x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln^2 x}.$$

Comme, pour tout x strictement supérieur à 1, $\frac{1}{x} > 0$ et $\ln^2 x > 0$, donc $f'(x) > 0$ et la fonction f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

2. On étudie les limites.

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. (a) La tangente $\mathcal{T}_a$ à la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f au point d'abscisse a , où $a \in]1, +\infty[$, a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Celle-ci passe par l'origine du repère si, et seulement si, $0 = f'(a)(0 - a) + f(a)$, c'est à dire si, et seulement si, $f(a) - af'(a) = 0$.
- (b) La fonction g est définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = f(x) - xf'(x)$. Pour tout x de $]1, +\infty[$, $\ln x \neq 0$, donc

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\iff \ln x - \frac{1}{\ln x} - x \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln^2 x} \right) = 0 \\ &\iff \ln x - \frac{1}{\ln x} - 1 - \frac{1}{\ln^2 x} = 0 \\ &\iff (\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1 = 0, \quad \text{ } \times \ln^2 x \neq 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve que les équations $g(x) = 0$ et $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.

- (c) La fonction u est définie sur $\mathbf{R}$ par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$, elle est dérivable et, pour tout réel t , $u'(t) = 3t^2 - 2t - 1$ qui est une fonction polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16$ et donc ses racines sont $t_1 = \frac{2-4}{2 \times 3} = -\frac{1}{3}$ et $t_2 = \frac{2+4}{6} = 1$. Une fonction polynôme du second degré étant du signe de son coefficient de degré 2 à l'extérieur des racines, on déduit le signe de u' (voir le tableau ci-après). On calcule les limites :

$$u(t) = t^3 \left(1 - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} \right) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t^2} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t^3} = 0,$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^3 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t^3 = -\infty.$$

On peut alors dresser le tableau de variation complet en calculant les extrema.

t	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$		
$u'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$u(t)$			$-\frac{22}{27}$		$+\infty$	
	$-\infty$			-2		

$$\begin{aligned} u\left(-\frac{1}{3}\right) &= -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1 \\ &= \frac{-1}{27} - \frac{3}{27} + \frac{9}{27} - \frac{27}{27} \\ &= -\frac{22}{27}, \\ u(1) &= 1 - 1 - 1 - 1 = -2. \end{aligned}$$

D'après le tableau de variation, $u(x) < 0$ sur $] -\infty, 1]$. Sur $[1, +\infty[$, u est continue, strictement croissante et $u(1) < 0 < \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, u s'annule une fois et une seule sur $[1, +\infty[$ et il en est donc de même sur $\mathbf{R}$. À la calculatrice, on obtient la valeur approchée $t_0 \approx 1,839$ (pas demandé).

4. La tangente $\mathcal{T}_a$ à la courbe $\mathcal{C}$ passe par l'origine du repère si, et seulement si, $g(a) = 0$ avec $a > 1$, ce qui équivaut à $u(\ln a) = 0$, avec $\ln a > 0$, soit encore $\ln a = t_0$ et donc $a = e^{t_0} \approx 6,290 > 1$ (pas demandé). Il y a bien une seule tangente concernée.

ANNEXE (exercice 1)

