

BACCALAURÉAT BLANC

Spécialité Mathématiques (sujet 2)

Mardi 27 février 2024

CORRIGÉ

Exercice 1

1. $M(x, y, z) \in \mathcal{D}$ si, et seulement si, il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ ce qui donne la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 8 + 5t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}).$$

2. (a) Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont respectivement pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ qui ne sont manifestement pas colinéaires. Ces deux plans n'étant pas parallèles sont sécants.
- (b) On vérifie que la droite $\mathcal{D}'$ est l'intersection des deux plans. Celle-ci a pour vecteur directeur $\vec{u}' \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On vérifie d'abord que $\vec{u}'$ est orthogonal au vecteur normal de chaque plan :

$$\begin{aligned} \vec{u}' \cdot \vec{n} &= 2 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times (-1) = 0, \\ \vec{u}' \cdot \vec{n}' &= 2 \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times (-2) = 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\mathcal{D}'$ est parallèle aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. Pour voir qu'elle est incluse, on prend le point $A'(11, 4, 0)$ de $\mathcal{D}'$ et on vérifie qu'il appartient à chaque plan :

$$\begin{aligned} x_{A'} - y_{A'} - z_{A'} &= 11 - 4 - 0 = 7 \quad \text{donc} \quad A' \in \mathcal{P}, \\ x_{A'} - 2z_{A'} &= 11 - 2 \times 0 = 11 \quad \text{donc} \quad A' \in \mathcal{Q}. \end{aligned}$$

3. Les vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{D}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{D}'$ ne sont pas colinéaires donc les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes ou non coplanaires. On cherche leur intersection :

$$\begin{cases} -2 + t = 11 + 2s \\ 8 + 5t = 4 + s \\ 4 - t = s \end{cases} \iff \begin{cases} 2s = -13 + t \\ s = 4 + 5t \\ s = 4 - t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 0 \\ s = -\frac{13}{2} \\ s = 4 \end{cases}.$$

Ce système n'a pas de solution donc les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

4. (a) $H(-3, 3, 5) \in \mathcal{D}$ si, et seulement si, il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que

$$\begin{cases} -3 = -2 + t \\ 3 = 8 + 5t \\ 5 = 4 - t \end{cases}.$$

Ce système a une solution évidente $t = -1$, donc $H \in \mathcal{D}$.

- (b) On a $\overrightarrow{HH'} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{HH'} \cdot \vec{u} = 6 \times 1 - 3 \times 5 - 9 \times (-1) = 0$, donc (HH') et $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires.

- (c) On calcule :

$$\begin{aligned} HH'^2 &= (3 + 3)^2 + (-3)^2 + (-4 - 5)^2 = 36 + 9 + 81 = 126 \\ \text{donc } HH' &= \sqrt{126} = \sqrt{9 \times 14} = 3\sqrt{14}. \end{aligned}$$

Remarque. La droite (HH') étant la perpendiculaire commune aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, la distance HH' est la plus courte distance entre les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

5. Soit un point $M(x, y, z)$; alors $\overrightarrow{MH'} \begin{pmatrix} 3-x \\ 0-y \\ -4-z \end{pmatrix}$ et donc

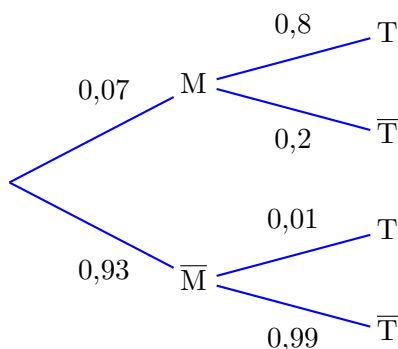
$$\begin{aligned} \overrightarrow{MH'} \cdot \overrightarrow{HH'} &= 126 \\ \iff (3-x) \times 6 + (0-y) \times (-3) + (-4-z) \times (-9) &= 126 \\ \iff 2(3-x) + y + 3(4+z) &= 42 \quad (\text{en divisant par 3}) \\ \iff -2x + y + 3z &= 24, \end{aligned}$$

qui est l'équation d'un plan. Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal au plan donc aussi $\overrightarrow{HH'} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Or, d'après la question 4c, $\overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{HH'} = HH'^2 = 126$ donc H appartient au plan. Ce plan est donc le plan passant par H et perpendiculaire à (HH') .

Exercice 2

1. On modélise la situation par un arbre pondéré.



On a donc $P(M \cap T) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$.

2. Les événements M et $\bar{M}$ formant une partition de l'univers, on a, d'après la formule probabilités totales,

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) = 0,07 \times 0,8 + 0,93 \times 0,01 = 0,0653.$$

3. $P_M(T)$ est la probabilité d'avoir un test positif sachant qu'on est malade, et $P_T(M)$ est la probabilité d'être malade sachant que le test est positif.

Dans un contexte de dépistage de la maladie, il est plus pertinent de calculer la probabilité d'être malade sachant que le test est positif c'est-à-dire $P_T(M)$.

4. On considère dans cette question que la personne choisie au hasard a eu un test positif.
La probabilité qu'elle soit malade est

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,07 \times 0,8}{0,0653} \approx 0,86.$$

5. (a) L'expérience aléatoire peut être assimilée à la répétition de $n = 10$ tirages avec remise, donc indépendants qui constituent une épreuve de Bernoulli où le succès est défini par le test positif, de probabilité $p = 0,0653$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc elle suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,0653$.
(b) La probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif est

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1 - 0,0653)^8 \approx 0,11.$$

6. On veut déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles ait un test positif, soit supérieure à 99 %.

Soit n le nombre de personnes testées. On cherche n pour que $P(X \geq 1) \geq 0,99$. On a $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$ soit

$$\begin{array}{l|l} 1 - 0,9347^n \geq 0,99 & \iff n \ln(0,9347) \leq \ln(0,01) \\ \iff 0,9347^n \leq 0,01 & \iff n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,9347)} \approx 68,2. \end{array}$$

Il faut donc tester 69 personnes dans ce pays pour que au moins une ait un test positif.

Exercice 3

Partie A : Logarithme

1. La fonction u est définie sur $]0, +\infty[$ par $u(x) = 1 - x + \ln(2x)$.

- (a) La fonction u est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée u' est telle que

$$u'(x) = -1 + \frac{2}{2x} = -1 + \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x}.$$

(b) On calcule les limites en 0 et en $+\infty$:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = -\infty$;
- $u(x) = x \left(\frac{1}{x} - 1 + 2 \frac{\ln(2x)}{2x} \right)$, or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -\infty$.

(c) Comme $x > 0$ sur $]0, +\infty[$, le signe de $u'(x)$ est celui de $1 - x$.

Le maximum de u est donc $u(1) = 1 - 1 + \ln 2 = \ln 2 > 0$, d'où le tableau de variation.

x	0	1	$+\infty$
$u'(x)$		+	0 -
$u(x)$	$-\infty$	$\ln 2$	$-\infty$

- Sur $]0, 1]$, u est continue, strictement croissante et $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) < 0 < u(1)$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x) = 0$ possède une unique solution sur cet intervalle.
- De même sur $[1, +\infty[$, u continue, strictement décroissante et $u(1) > 0 > \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$ donc $u(x) = 0$ possède une unique solution sur cet intervalle.

Donc au total, l'équation $u(x) = 0$ possède deux solutions.

2. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = 1 - \ln \left(\frac{n+1}{n} \right).$$

On a, pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 - \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right) - 1 + \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \\ &= \ln \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right) = \ln \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} \right). \end{aligned}$$

Or $n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n > 0$ donc la fraction est supérieure à 1 et donc son logarithme népérien est strictement positif. Ainsi la suite est croissante.

Remarque. On pouvait aussi voir que la dérivée de la fonction $f : x \mapsto 1 - \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)$ sur $]0, +\infty[$ est telle que

$$f'(x) = - \frac{\frac{1 \times x - (x+1) \times 1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = - \frac{-1}{x^2} \times \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} > 0.$$

3. La fonction f est définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

(a) Pour tout x de $[0, +\infty[$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1}{1+x} + \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \frac{1+x^2-1}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}.$$

(b) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f'(x) \geq 0$ et ne s'annule qu'en 0, donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$ et comme $f(0) = \ln 1 - 0 = 0$, on en déduit que, pour tout x de $[0, +\infty[$, $f(x) \geq 0$.

Partie B : Algorithme de dichotomie

1. On complète le script Python (lignes 5 et 7).

```

1 def dichotomie(f, a, b, epsilon):
2     while b - a > epsilon:
3         m = (a + b)/2
4         if f(m) < 0:
5             a = m
6         else:
7             b = m
8     return (a + b)/2

```

2. Le tableau complété.

	Valeur de m	Valeur de $f(m)$	Valeur de a	Valeur de b	$b - a$
Valeurs init			0	1	1
étape 1	0,5	-0,375	0,5	1	0,5
étape 2	0,75	0,171875	0,5	0,75	0,25

3. Soit α la solution de l'équation $x^3 + x - 1$. À la calculatrice on obtient $\alpha \approx 0,68$ à 10^{-2} près.

Exercice 4

Partie A : Conjectures

1. la formule qu'il faut saisir dans la cellule B3 pour obtenir les termes de la suite (u_n) :

$$=2*B2-A2+3$$

2. D'après les résultats du tableur, on conjecture que

- la limite de (u_n) semble être $+\infty$,
- la limite de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ semble être 3.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

1. On montre par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

- Initialisation. $u_0 = 1$ et $3 \times 2^0 + 0 - 2 = 1$ donc l'égalité est vérifiée au rang 0.
- Hérédité. Supposons que, pour un entier $n \in \mathbf{N}$ particulier, on ait $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$. D'après la définition,

$$\begin{array}{l|l} u_{n+1} = 2u_n - n + 3 & = 3 \times 2^{n+1} + n - 1 \\ = 2(3 \times 2^n + n - 2) - n + 3 & = 3 \times 2^{n+1} + (n + 1) - 2. \\ = 3 \times 2^{n+1} + 2n - 4 - n + 3 & \end{array}$$

La relation est vraie au rang $n + 1$.

- Conclusion. La relation est vraie au rang 0, et elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de la récurrence, on peut affirmer que, pour tout naturel n , $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

2. On détermine la limite de la suite (u_n) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ car $2 > 1$, donc par somme,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

3. À la calculatrice, on détermine le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million : $u_{18} = 786\,448 < 1\,000\,000$ et $u_{19} = 1\,572\,881 > 1\,000\,000$. Donc 19 est le rang du premier terme supérieur à un million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

1. On montre que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3 :

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{v_n} = \frac{2u_n - n + 3}{2^{n+1}} - \frac{u_n}{2^n} = \frac{2u_n - n + 3}{2^{n+1}} - \frac{2u_n}{2^{n+1}} = \frac{-n + 3}{2^{n+1}}$$

qui est du signe de $-n + 3$, donc négatif ou nul si $n \geq 3$.

Ceci prouve que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$. Or pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{u_n}{v_n} = 3 + \frac{n-2}{2^n} = 3 + \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Avec l'encadrement donné, on en déduit que, pour $n \geq 4$,

$$3 - \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{u_n}{v_n} \leq 3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ (car $2 > 1$), alors, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 3.$$