BACCALAURÉAT BLANC

Spécialité Mathématiques (sujet 2)

Mardi 27 février 2024

Durée de l'épreuve : 4 h

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée en mode examen.
Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Exercice 1

5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. On considère le point A de coordonnées $(-2, 8, 4)$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2. On considère les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ d'équations cartésiennes respectives

$$\mathscr{P} : x - y - z = 7 \quad \text{et} \quad \mathscr{Q} : x - 2z = 11.$$

(a) Justifier que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont sécants.

(b) Démontrer qu'une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée $\mathscr{D}'$, est

$$\mathscr{D}' : \begin{cases} x = 11 + 2s \\ y = 4 + s \\ z = s \end{cases} \quad (s \in \mathbf{R}).$$

3. Démontrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.

4. On considère le point H de coordonnées $(-3, 3, 5)$ et le point H$'$ de coordonnées $(3, 0, -4)$.

(a) Vérifier que H appartient à $\mathscr{D}$.

(b) Démontrer que la droite (HH') est perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$.

(c) Calculer la longueur HH'.
On admet que H' *appartient à* $\mathscr{D}'$ *et que* (HH') *est perpendiculaire à* $\mathscr{D}'$*, cela correspond alors à la distance entre les droites* $\mathscr{D}$ *et* $\mathscr{D}'$.

5. Déterminer l'ensemble des points $\mathrm{M}(x, y, z)$ de l'espace tels que $\overrightarrow{\mathrm{MH}'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HH}'} = 126$.

Exercice 2

4 points

Selon les autorités sanitaires d'un pays, 7 % des habitants sont affectés par une certaine maladie. Dans ce pays, un test est mis au point pour détecter cette maladie. Ce test a les caractéristiques suivantes :
— pour les individus malades, le test donne un résultat négatif dans 20 % des cas ;
— pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans 1 % des cas.
Une personne est choisie au hasard dans la population et testée.
On considère les événements suivants :

- M « la personne est malade » ;
- T « le test est positif ».

1. Représenter l'arbre pondéré modélisant la situation et calculer la probabilité de l'événement $M \cap T$.

2. Démontrer que la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif, est de 0,0653.

3. Dans un contexte de dépistage de la maladie, est-il plus pertinent de connaître $P_M(T)$ ou $P_T(M)$?

4. On considère dans cette question que la personne choisie au hasard a eu un test positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

5. On choisit 10 personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes.

(a) Préciser, en justifiant, la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.

(b) Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif. On indiquera d'abord la formule permettant de calculer la réponse et on arrondira le résultat à 10^{-2} près.

6. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elle ait un test positif, soit supérieur à 99 %.

Exercice 3

6 points

Cet exercice est composé de deux parties indépendantes. La partie A est composée de 3 questions également indépendantes.

Partie A : Logarithme

1. Soit u la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$u(x) = 1 - x + \ln(2x).$$

(a) Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0,+\infty[$,

$$u'(x) = \frac{1-x}{x}.$$

(b) Calculer les limites de la fonction u en 0 et en $+\infty$.

(c) Dresser le tableau de variations complet de la fonction u et en déduire le nombre de solutions de l'équation $u(x) = 0$ (*justifier soigneusement*).

2. La suite (u_n), définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = 1 - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

On pourra déterminer le signe $u_{n+1} - u_n$ ou bien *celui de la dérivée de la fonction f définie sur* $]0,+\infty[$ *par* $f(x) = 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

3. Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

(a) Démontrer que, pour tout $x \in [0,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{x^2}{1+x}.$$

(b) En déduire que, pour tout x de $[0,+\infty[$, $f(x) \geqslant 0$.

Partie B : Algorithme de dichotomie

On donne ci-dessous un script Python permettant de calculer une valeur approchée d'une solution de l'équation $f(x) = 0$ sur un intervalle $[a,b]$ à une précision ε (epsilon), en supposant que la fonction f est strictement croissante, continue, et s'annule entre a et b.

La méthode, appelée *dichotomie*, consiste, à chaque tour de boucle, à remplacer l'intervalle $[a,b]$ par $[a,m]$ ou $[m,b]$ où m est le milieu de $[a,b]$, en fonction du signe de $f(m)$ (et donc de la position du zéro). De ce fait la largeur de l'intervalle est divisée par 2 à chaque tour de boucle et l'on quitte la boucle lorsque l'écart entre les deux bornes a et b devient inférieure ou égale à la précision voulue.

1. Recopier et compléter la fonction Python suivante (lignes 5 et 7) afin qu'elle renvoie une approximation de la solution de $f(x) = 0$.

```
1 def dichotomie(f, a, b, epsilon):
2     while b - a > epsilon:
3         m = (a + b)/2
4         if f(m) < 0:
5             ...
6         else:
7             ...
8     return (a + b)/2
```

2. Faire fonctionner cet algorithme à la main avec $f(x) = x^3 + x - 1$ sur $[0, 1]$. On admet que f est strictement croissante, continue et qu'elle s'annule sur $]0, 1[$. On fera apparaître les deux premières étapes du déroulement de l'algorithme en complétant le tableau ci-dessous (à reproduire sur la copie). *On ne se préoccupera pas ici de la valeur de ε.*

	Valeur de m	Valeur de $f(m)$	Valeur de a	Valeur de b	$b - a$
valeurs init			0	1	
étape 1					
étape 2					

3. Donner, à 10^{-2} près, la valeur obtenue à la calculatrice pour la solution de $x^3 + x - 1 = 0$.

Exercice 4

5 points

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$;
- la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

On a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

1. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 pour obtenir par copie vers le bas les termes de la suite (u_n) ?

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13, on obtient les résultats suivants :

12	10	3 080	1 024
13	11	6 153	2 048
14	12	12 298	4 096
15	13	24 587	8 192

Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a

$$u_n = 3\times 2^n + n - 2.$$

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer le rang du 1$^{\text{er}}$ terme de la suite supérieur à 1 million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

1. En exprimant la différence $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \dfrac{u_n}{v_n}$, démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \dfrac{n}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.