BACCALAURÉAT BLANC

Spécialité Mathématiques (sujet 1)

Lundi 26 février 2024

Durée de l'épreuve : 4 h

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée en mode examen.
Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Exercice 1

4 points

L'espace est rapporté un repère orthonormé où l'on considère :

- les points $A(2, -1, 0)$ $B(1, 0, -3)$, $C(6, 6, 1)$ et $E(1, 2, 4)$;
- le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

1. **(a)** Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

(b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ puis les longueurs BA et BC.

(c) En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.

2. **(a)** Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (ABC).

(b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

(c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E.

(d) Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées

$$\left(4, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

Exercice 2

5 points

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{12u_n - 10}{u_n + 1}.$$

1. (a) Sur le graphique donné en Annexe (page 5), on a représenté la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ où f est définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{12x - 10}{x + 1}.$$

Sur l'axe des abscisses, on a placé la valeur de u_0. À l'aide de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite $\mathscr{D}$, construire u_1, u_2, u_3, en laissant apparents les traits de construction.

(b) Quelle conjecture peut-on faire concernant le sens de variation et la convergence de cette suite ?

2. (a) Démontrer que la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$.

(b) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10.$$

Notons que cela permet d'affirmer que la suite (u_n) est bien définie puisque jamais $u_n = -1$.

(c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n). Justifier.

Partie B

On considère l'algorithme suivant écrit en langage Python :

```
def f(x):
    return (12*x-10)/(x+1)

n = 0
u = 2
while abs(u - 10) > 0.1:
    n = n + 1
    u = f(u)
```

1. Recopier et compléter le tableau de fonctionnement pas à pas ci-dessous (on arrondira au centième) :

n	0	1	2	3	4
u	2				
$\lvert u - 10\rvert > 0{,}1$ (Vrai/Faux)	Vrai				

2. Que fait cet algorithme ?

3. Quelle est la valeur de n lorsque l'algorithme s'arrête ?

Exercice 3

5 points

Cet exercice est composé de deux parties indépendantes.

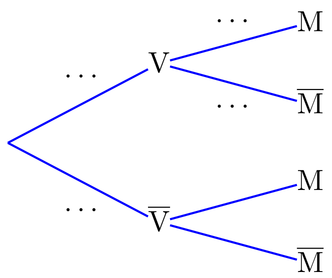
Partie A

Un quart de la population d'un pays a été vacciné. Parmi les vaccinés, on compte $1/12$ de malades. Parmi les malades, $2/3$ n'est pas vacciné. On veut calculer la probabilité qu'une personne non vaccinée tombe malade.

Pour une personne choisie au hasard dans la population on appellera V l'événement : « la personne est vaccinée » et M l'événement : « la personne est malade ».

1. **(a)** Traduire en terme de probabilités les informations de l'énoncé.

On pourra éventuellement compléter l'arbre suivant avec certaines informations pour visualiser la situation.



(b) En déduire $P(\overline{V})$ et justifier que $P_M(V) = \dfrac{1}{3}$.

2. **(a)** Calculer $P(M \cap V)$.

(b) En déduire que $P(M) = \dfrac{1}{16}$.

3. **(a)** Grâce à la formule des probabilités totales, calculer alors $P(M \cap \overline{V})$.

(b) Donner alors la probabilité cherchée.

Partie B

Une urne contient 3 boules rouges et 7 boules noires. On tire successivement, avec remise, 10 boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges tirées.

1. **(a)** Justifier que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10\,;0{,}3)$.

(b) Donner la formule permettant de calculer $P(X = k)$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$.

2. À l'aide de la calculatrice calculer (*on donnera les résultats arrondis à 10^{-3} près*) :

(a) $P(X = 3)$, **(b)** $P(2 \leqslant X \leqslant 6)$, **(c)** $P_{X\leqslant 6}(X \leqslant 4)$.

Exercice 4

6 points

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}.$$

Dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on nomme $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. Étudier les variations de la fonction f.

2. Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.

3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ passant par le point O.

(a) Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1, +\infty[$. Démontrer que la tangente $\mathscr{T}_a$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a passe par l'origine du repère, si, et seulement si, $f(a) - af'(a) = 0$.

(b) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par

$$g(x) = f(x) - xf'(x).$$

Montrer que, sur $]1, +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.

(c) Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbf{R}$ par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$, montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbf{R}$ (*justifier soigneusement*).

4. En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe $\mathscr{C}$ passant par le point O.

ANNEXE (à rendre avec la copie)